

L'alternative de Tits uniforme pour les endomorphismes de la droite projective

Alonso Beaumont

Université de Rennes - IRMAR

Janvier 2026

L'alternative de Tits uniforme

Définition (Alternative de Tits)

Un groupe G satisfait **l'alternative de Tits** si tout sous-groupe $\Gamma < G$ de type fini vérifie l'une des deux assertions suivantes:

- 1 Γ contient un sous-groupe libre non-abélien.
- 2 Γ est virtuellement résoluble.

L'alternative de Tits uniforme

Définition (Alternative de Tits)

Un groupe G satisfait l'**alternative de Tits** si tout sous-groupe $\Gamma < G$ de type fini vérifie l'une des deux assertions suivantes:

- 1 Γ contient un sous-groupe libre non-abélien.
- 2 Γ est virtuellement résoluble.

Définition (Alternative de Tits uniforme)

Soit Γ de type fini, $F \subset \Gamma$ une partie génératrice finie telle que $e \in F$, $F^{-1} = F$. On définit

$$r(F) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid F^n \text{ contient deux éléments indépendants}\}$$

$$\text{et } r(\Gamma) = \sup_F r(F).$$

L'alternative de Tits uniforme

Définition (Alternative de Tits)

Un groupe G satisfait **l'alternative de Tits** si tout sous-groupe $\Gamma < G$ de type fini vérifie l'une des deux assertions suivantes:

- 1 Γ contient un sous-groupe libre non-abélien.
- 2 Γ est virtuellement résoluble.

Définition (Alternative de Tits uniforme)

Soit Γ de type fini, $F \subset \Gamma$ une partie génératrice finie telle que $e \in F$, $F^{-1} = F$. On définit

$$r(F) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid F^n \text{ contient deux éléments indépendants}\}$$

et $r(\Gamma) = \sup_F r(F)$.

On dit qu'un groupe G satisfait **l'alternative de Tits uniforme** si tout $\Gamma < G$ de type fini dans le cas (1) vérifie $r(\Gamma) < +\infty$.

Exemples

Des exemples de groupes G qui vérifient l'alternative de Tits uniforme:

- G hyperbolique (M. Koubi, 1998).
- G linéaire (E. Breuillard et T. Gelander, 2008)

L'alternative de Tits uniforme

Exemples

Des exemples de groupes G qui vérifient l'alternative de Tits uniforme:

- G hyperbolique (M. Koubi, 1998).
- G linéaire (E. Breuillard et T. Gelander, 2008)

Un exemple de groupe G qui satisfait l'alternative de Tits, mais pas uniformément:

- $G = BS(2, 3) = \langle a, b \mid b^{-1}a^2b = a^3 \rangle$.

En effet, $F_n = \{e, a^{\pm 2^n}, b^{\pm 1}\}$ engendre G mais $r(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

L'alternative de Rosenblatt uniforme

Définition (Alternative de Rosenblatt)

Un semigroupe S satisfait **l'alternative de Rosenblatt** si tout sous-semigroupe $\Sigma = \langle F \rangle < S$ de type fini vérifie l'une des deux assertions suivantes:

- 1 Σ contient un sous-semigroupe libre non-abélien.
- 2 Σ est à croissance polynomiale: $\#F^n \ll n^d$ pour un certain d .

L'alternative de Rosenblatt uniforme

Définition (Alternative de Rosenblatt)

Un semigroupe S satisfait **l'alternative de Rosenblatt** si tout sous-semigroupe $\Sigma = \langle F \rangle < S$ de type fini vérifie l'une des deux assertions suivantes:

- ① Σ contient un sous-semigroupe libre non-abélien.
- ② Σ est à croissance polynomiale: $\#F^n \ll n^d$ pour un certain d .

Remarque: Si S est simplifiable (i.e. $ab = ac$ ou $ba = ca$ impliquent $b = c$), le cas (2) de l'alternative peut être remplacé par “ Σ se plonge dans un groupe virtuellement nilpotent”.

L'alternative de Rosenblatt uniforme

Définition (Alternative de Rosenblatt)

Un semigroupe S satisfait **l'alternative de Rosenblatt** si tout sous-semigroupe $\Sigma = \langle F \rangle < S$ de type fini vérifie l'une des deux assertions suivantes:

- 1 Σ contient un sous-semigroupe libre non-abélien.
- 2 Σ est à croissance polynomiale: $\#F^n \ll n^d$ pour un certain d .

Remarque: Si S est simplifiable (i.e. $ab = ac$ ou $ba = ca$ impliquent $b = c$), le cas (2) de l'alternative peut être remplacé par “ Σ se plonge dans un groupe virtuellement nilpotent”.

Pour $\Sigma = \langle F \rangle$, $r^+(F) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid F^n \ni a, b \text{ pos. indépendants}\}$
et $r^+(\Sigma) = \sup_F r^+(F)$.

L'alternative de Rosenblatt uniforme

Définition (Alternative de Rosenblatt)

Un semigroupe S satisfait **l'alternative de Rosenblatt** si tout sous-semigroupe $\Sigma = \langle F \rangle < S$ de type fini vérifie l'une des deux assertions suivantes:

- 1 Σ contient un sous-semigroupe libre non-abélien.
- 2 Σ est à croissance polynomiale: $\#F^n \ll n^d$ pour un certain d .

Remarque: Si S est simplifiable (i.e. $ab = ac$ ou $ba = ca$ impliquent $b = c$), le cas (2) de l'alternative peut être remplacé par “ Σ se plonge dans un groupe virtuellement nilpotent”.

Pour $\Sigma = \langle F \rangle$, $r^+(F) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid F^n \ni a, b \text{ pos. indépendants}\}$
et $r^+(\Sigma) = \sup_F r^+(F)$.

On dit que S satisfait **l'alternative de Rosenblatt uniforme** si tout $\Sigma < S$ de type fini dans le cas (1) vérifie $r^+(\Sigma) < +\infty$.

L'alternative de Rosenblatt uniforme

Exemples

Des exemples de semigroupes S qui vérifient l'alternative de Rosenblatt uniforme:

- $S =$ groupe résoluble (J. Rosenblatt, 1974; E. Breuillard, 2007).
- $S =$ groupe linéaire (J. Okniński et A. Salwa, 1995; E. Breuillard et T. Gelander, 2005)
- $S = \text{Exp}(M)$, le semigroupe d'applications dilatantes $M \rightarrow M$ où M est une variété riemannienne compacte.

L'alternative de Rosenblatt uniforme

Exemples

Des exemples de semigroupes S qui vérifient l'alternative de Rosenblatt uniforme:

- $S =$ groupe résoluble (J. Rosenblatt, 1974; E. Breuillard, 2007).
- $S =$ groupe linéaire (J. Okniński et A. Salwa, 1995; E. Breuillard et T. Gelander, 2005)
- $S = \text{Exp}(M)$, le semigroupe d'applications dilatantes $M \rightarrow M$ où M est une variété riemannienne compacte.

Problème

Donner des exemples de groupes qui satisfont l'alternative de Rosenblatt sans satisfaire l'alternative de Tits, et inversement.

Endomorphismes de l'espace projectif

Rappels (Endomorphismes de l'espace projectif)

Soit n un entier positif. On considère **l'espace projectif complexe** $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \text{homothéties}$. Un **endomorphisme** de l'espace projectif est une application $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la forme

$$[z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [P_0(z_0, \cdots, z_n) : \cdots : P_n(z_0, \cdots, z_n)]$$

où $P_0, \cdots, P_n \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ sont des polynômes homogènes de même degré sans zéros communs. On note $\text{End}(\mathbb{P}^n)$ l'ensemble d'endomorphismes de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, un semigroupe pour la composition.

Endomorphismes de l'espace projectif

Rappels (Endomorphismes de l'espace projectif)

Soit n un entier positif. On considère **l'espace projectif complexe** $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \text{homothéties}$. Un **endomorphisme** de l'espace projectif est une application $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la forme

$$[z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [P_0(z_0, \cdots, z_n) : \cdots : P_n(z_0, \cdots, z_n)]$$

où $P_0, \cdots, P_n \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ sont des polynômes homogènes de même degré sans zéros communs. On note $\text{End}(\mathbb{P}^n)$ l'ensemble d'endomorphismes de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, un semigroupe pour la composition.

L'ensemble de **points prépériodiques** de $f \in \text{End}(\mathbb{P}^n)$, noté $\text{Prep}(f)$, est l'ensemble des $z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dont **l'orbite** $\{z, f(z), f(f(z)), \cdots\}$ est finie.

Endomorphismes de la droite projective

Si $n = 1$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et tout $f = [P_0 : P_1] \in \text{End}(\mathbb{P}^1)$ peut s'écrire $f(z) = P_0(z, 1)/P_1(z, 1)$: on a donc $\text{End}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(X)$ muni de la composition.

Endomorphismes de la droite projective

Si $n = 1$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et tout $f = [P_0 : P_1] \in \text{End}(\mathbb{P}^1)$ peut s'écrire $f(z) = P_0(z, 1)/P_1(z, 1)$: on a donc $\text{End}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(X)$ muni de la composition.

Théorème (J. P. Bell, K. Huang, H. Peng et T. J. Tucker, 2024)

Le semigroupe $\text{End}(\mathbb{P}^1)$ vérifie l'alternative de Rosenblatt. Plus précisément, si $\Sigma < \text{End}(\mathbb{P}^1)$ est de type fini et $\Sigma_{\geq 2}$ est non-vide, alors:

- 1 Σ contient un sous-semigroupe libre non-abélien si et seulement si $\exists f, g \in \Sigma_{\geq 2}$, $\text{Prep}(f) \neq \text{Prep}(g)$.
- 2 Σ est à croissance polynomiale si et seulement si $\forall f, g \in \Sigma_{\geq 2}$, $\text{Prep}(f) = \text{Prep}(g)$.

Exemples

- Soient $f(z) = z^2$ et $g(z) = z^3$. Alors

$$(f \circ g)(z) = (g \circ f)(z) = z^6;$$

f et g commutent, et donc la croissance de $\Sigma = \langle f, g \rangle$ est quadratique.

Exemples

- Soient $f(z) = z^2$ et $g(z) = z^3$. Alors

$$(f \circ g)(z) = (g \circ f)(z) = z^6;$$

f et g commutent, et donc la croissance de $\Sigma = \langle f, g \rangle$ est quadratique.

- Soient $f(z) = z^2$ et $g(z) = \alpha z^2$, où α n'est pas une racine de l'unité. Pour tout mot w en deux lettres, $w(f, g)(z) = \alpha^n z^{2^k}$ où n, k déterminent w : $\Sigma = \langle f, g \rangle$ est un semigroupe libre non-abélien.

Théorème (B., 2025)

Soient $f_1, f_2 \in \text{End}(\mathbb{P}^n)$ deux endomorphismes de degré au moins 2 tels que $\text{Prep}(f_1) \neq \text{Prep}(f_2)$. Alors f_1 et f_2 engendrent un semigroupe libre non-abélien.

Endomorphismes de la droite projective

Théorème (B., 2025)

Soient $f_1, f_2 \in \text{End}(\mathbb{P}^n)$ deux endomorphismes de degré au moins 2 tels que $\text{Prep}(f_1) \neq \text{Prep}(f_2)$. Alors f_1 et f_2 engendrent un semigroupe libre non-abélien.

Corollaire

Le semigroupe $\text{End}(\mathbb{P}^1)$ vérifie l'alternative de Rosenblatt uniforme.

Endomorphismes de la droite projective

Théorème (B., 2025)

Soient $f_1, f_2 \in \text{End}(\mathbb{P}^n)$ deux endomorphismes de degré au moins 2 tels que $\text{Prep}(f_1) \neq \text{Prep}(f_2)$. Alors f_1 et f_2 engendrent un semigroupe libre non-abélien.

Corollaire

Le semigroupe $\text{End}(\mathbb{P}^1)$ vérifie l'alternative de Rosenblatt uniforme.

Idée: Si $\Sigma = \langle F \rangle$ contient f_1, f_2 tels que $\text{Prep}(f_1) \neq \text{Prep}(f_2)$, alors F^2 contient des tels éléments, donc $r^+(\Sigma) \leq 2$.

On fixe $f_1, f_2 \in \text{End}(\mathbb{P}^n)$ de degrés $d_1, d_2 \geq 2$ tels que $\text{Prep}(f_1) \neq \text{Prep}(f_2)$. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un corps de type fini qui contient les coefficients de f_1, f_2 , et $\bar{K}$ la clôture algébrique de K dans $\mathbb{C}$.

On fixe $f_1, f_2 \in \text{End}(\mathbb{P}^n)$ de degrés $d_1, d_2 \geq 2$ tels que $\text{Prep}(f_1) \neq \text{Prep}(f_2)$. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un corps de type fini qui contient les coefficients de f_1, f_2 , et $\bar{K}$ la clôture algébrique de K dans $\mathbb{C}$.

On peut définir une **fonction hauteur** $h_0 : \mathbb{P}^n(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $z = [z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n(K)$, le réel $h_0(z)$ est défini comme une “somme pondérée” d’expressions de la forme

$$\log \max(|z_0|_v, \dots, |z_n|_v)$$

où $|\cdot|_v$ varie parmi toutes les valeurs absolues sur K .

Exemple: Si $z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$, on a

$$h_0(z) = \left(\log \max_{0 \leq i \leq n} |z_i|_\infty \right) + \sum_{p \text{ premier}} \left(\log \max_{0 \leq i \leq n} |z_i|_p \right)$$

où $|\cdot|_\infty$ est la valeur absolue standard, et $|\cdot|_p$ est la valeur absolue p -adique.

Exemple: Si $z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$, on a

$$h_0(z) = \left(\log \max_{0 \leq i \leq n} |z_i|_\infty \right) + \sum_{p \text{ premier}} \left(\log \max_{0 \leq i \leq n} |z_i|_p \right)$$

où $|\cdot|_\infty$ est la valeur absolue standard, et $|\cdot|_p$ est la valeur absolue p -adique.

Cette expression ne dépend pas du choix de coordonnées homogènes: si on choisit $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$ sans facteurs communs alors

$$h_0(z) = \log \max_{0 \leq i \leq n} |z_i|_\infty$$

On voit que, pour tout $C > 0$, $\{z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) \mid h_0(z) \leq C\}$ est fini.

Propriétés

- **Fonctorialité:** Pour tout $f \in \text{End}(\mathbb{P}^n)$ défini sur $\bar{K}$,

$$h_0(f(z)) = \deg(f) \cdot h_0(z) + O(1).$$

(Pensez à $\log |P(z)| \sim \deg(P) \log |z|$).

Propriétés

- **Fonctorialité:** Pour tout $f \in \text{End}(\mathbb{P}^n)$ défini sur $\bar{K}$,

$$h_0(f(z)) = \deg(f) \cdot h_0(z) + O(1).$$

(Pensez à $\log |P(z)| \sim \deg(P) \log |z|$).

- **Propriété de Northcott:** Pour tout $C, D > 0$, l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{P}^n(\bar{K}) \mid h_0(z) \leq C, [K(z) : K] \leq D\}$$

est fini.

On définit $\mathcal{H} := \{h : \mathbb{P}^n(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R} \mid h(z) = h_0(z) + O(1)\}$, un espace métrique complet pour la distance $\|h_1 - h_2\|_\infty$. Par fonctorialité, un endomorphisme f de degré $d \geq 2$ induit une application $\alpha_f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $h \mapsto \frac{1}{d}(h \circ f)$. Il s'agit d'une **similitude de rapport $1/d$** .

On définit $\mathcal{H} := \{h : \mathbb{P}^n(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R} \mid h(z) = h_0(z) + O(1)\}$, un espace métrique complet pour la distance $\|h_1 - h_2\|_\infty$. Par fonctorialité, un endomorphisme f de degré $d \geq 2$ induit une application $\alpha_f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $h \mapsto \frac{1}{d}(h \circ f)$. Il s'agit d'une **similitude de rapport $1/d$** .

Par le théorème du point fixe de Banach, α_f admet un unique point fixe dans $\mathcal{H}$ qu'on note $\hat{h}_f$. Par définition, $\hat{h}_f(f(z)) = d \cdot \hat{h}_f(z)$.

On définit $\mathcal{H} := \{h : \mathbb{P}^n(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R} \mid h(z) = h_0(z) + O(1)\}$, un espace métrique complet pour la distance $\|h_1 - h_2\|_\infty$. Par fonctorialité, un endomorphisme f de degré $d \geq 2$ induit une application $\alpha_f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $h \mapsto \frac{1}{d}(h \circ f)$. Il s'agit d'une **similitude de rapport $1/d$** .

Par le théorème du point fixe de Banach, α_f admet un unique point fixe dans $\mathcal{H}$ qu'on note $\hat{h}_f$. Par définition, $\hat{h}_f(f(z)) = d \cdot \hat{h}_f(z)$.

Fait: $\text{Prep}(f) = \{z \in \mathbb{P}^n(\bar{K}) \mid \hat{h}_f(z) = 0\}$.

Ceci dérive de $\hat{h}_f(f^k(z)) = d^k \cdot \hat{h}_f(z)$, et de la propriété de Northcott.

En somme: f_1, f_2 de degrés d_1, d_2 tels que $\text{Prep}(f_1) \neq \text{Prep}(f_2)$ induisent $\alpha_1, \alpha_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, similitudes de rapport $1/d_1, 1/d_2$, avec des points fixes distincts.

En somme: f_1, f_2 de degrés d_1, d_2 tels que $\text{Prep}(f_1) \neq \text{Prep}(f_2)$ induisent $\alpha_1, \alpha_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, similitudes de rapport $1/d_1, 1/d_2$, avec des points fixes distincts.

Lemme (Ping-pong pour des contractions)

Soient $\alpha_1, \alpha_2 : X \rightarrow X$ deux contractions injectives sur un espace métrique complet X . Supposons que leurs points fixes sont distincts, et que leurs rapports c_1, c_2 vérifient $c_1 + c_2 \leq 1$. Alors α_1 et α_2 engendrent un semigroupe libre de rang 2.

Démonstration du Lemme

Fixons $x_0 \in X$. Pour tout $u = (\alpha_{i_k})_{k \geq 0} \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^{\mathbb{N}}$, la suite $(\alpha_{i_0} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}(x_0))_{k \geq 0}$ est de Cauchy, et donc converge vers un point $x_u \in X$. On note $A = \{x_u; u \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^{\mathbb{N}}\}$ **l'attracteur** associé à $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. C'est l'unique compact non-vide de X qui vérifie $A = \alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)$.

Démonstration du Lemme

Fixons $x_0 \in X$. Pour tout $u = (\alpha_{i_k})_{k \geq 0} \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^{\mathbb{N}}$, la suite $(\alpha_{i_0} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}(x_0))_{k \geq 0}$ est de Cauchy, et donc converge vers un point $x_u \in X$. On note $A = \{x_u; u \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^{\mathbb{N}}\}$ **l'attracteur** associé à $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. C'est l'unique compact non-vide de X qui vérifie $A = \alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)$.

Premier cas: A non connexe. Soient $A_1, A_2 \subset A$ compacts non-vides disjoints tels que $A = A_1 \cup A_2$. Une paire $(x, y) \in A_1 \times A_2$ s'écrit $x = pu(x_0)$, $y = pu'(x_0)$ où p est un mot fini en α_1 et α_2 . On fixe (x, y) qui maximise la longueur de p .

Démonstration du Lemme

Fixons $x_0 \in X$. Pour tout $u = (\alpha_{i_k})_{k \geq 0} \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^{\mathbb{N}}$, la suite $(\alpha_{i_0} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}(x_0))_{k \geq 0}$ est de Cauchy, et donc converge vers un point $x_u \in X$. On note $A = \{x_u; u \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^{\mathbb{N}}\}$ **l'attracteur** associé à $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. C'est l'unique compact non-vidé de X qui vérifie $A = \alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)$.

Premier cas: A non connexe. Soient $A_1, A_2 \subset A$ compacts non-vides disjoints tels que $A = A_1 \cup A_2$. Une paire $(x, y) \in A_1 \times A_2$ s'écrit $x = pu(x_0)$, $y = pu'(x_0)$ où p est un mot fini en α_1 et α_2 . On fixe (x, y) qui maximise la longueur de p .

S'il existait $z = \alpha_1 v(x_0) = \alpha_2 v'(x_0) \in \alpha_1(A) \cap \alpha_2(A)$, alors sans perte de généralité, $p(z) \in A_1$. Mais dans ce cas $(p(z), y) \in A_1 \times A_2$, et $p(z) = p\alpha_1 v(x_0) = p\alpha_2 v'(x_0)$ possède un préfixe commun avec y plus long que p , contradiction.

Démonstration du Lemme

On a donc $\alpha_1(A) \cap \alpha_2(A) = \emptyset$. Supposons qu'il existe deux mots distincts w_1, w_2 tels que $w_1 = w_2$ dans $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. En simplifiant à gauche, on a $\alpha_1 w'_1 = \alpha_2 w'_2$, mais alors $\alpha_1 w'_1(A) = \alpha_2 w'_2(A) \subset \alpha_1(A) \cap \alpha_2(A)$, contradiction: $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ **est libre de rang 2**.

Démonstration du Lemme

On a donc $\alpha_1(A) \cap \alpha_2(A) = \emptyset$. Supposons qu'il existe deux mots distincts w_1, w_2 tels que $w_1 = w_2$ dans $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. En simplifiant à gauche, on a $\alpha_1 w'_1 = \alpha_2 w'_2$, mais alors $\alpha_1 w'_1(A) = \alpha_2 w'_2(A) \subset \alpha_1(A) \cap \alpha_2(A)$, contradiction: $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ **est libre de rang 2**.

Deuxième cas: A **connexe**. L'égalité $A = \alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)$ se généralise en

$$A = \bigcup_{w \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^n} w(A), \quad n \geq 0.$$

Démonstration du Lemme

On a donc $\alpha_1(A) \cap \alpha_2(A) = \emptyset$. Supposons qu'il existe deux mots distincts w_1, w_2 tels que $w_1 = w_2$ dans $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. En simplifiant à gauche, on a $\alpha_1 w'_1 = \alpha_2 w'_2$, mais alors $\alpha_1 w'_1(A) = \alpha_2 w'_2(A) \subset \alpha_1(A) \cap \alpha_2(A)$, contradiction: $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ **est libre de rang 2**.

Deuxième cas: A connexe. L'égalité $A = \alpha_1(A) \cup \alpha_2(A)$ se généralise en

$$A = \bigcup_{w \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^n} w(A), \quad n \geq 0.$$

Soit $n \geq 0$, et considérons le graphe dont les sommets sont les $w(A)$, $w \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^n$, et deux sommets sont reliés par une arête si $w(A) \cap w'(A) \neq \emptyset$. Ce graphe est connexe car A l'est.

Démonstration du Lemme

Si $w_1(A), \dots, w_k(A)$ est un chemin simple dans le graphe, avec $k < 2^n$, alors pour tout $x \in w_1(A)$, $y \in w_k(A)$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \text{diam}(w_1(A)) + \dots + \text{diam}(w_k(A)) \\ &\leq c_{w_1} \text{diam}(A) + \dots + c_{w_k} \text{diam}(A) \\ &< (c_1 + c_2)^n \text{diam}(A) \leq \text{diam}(A). \end{aligned}$$

Démonstration du Lemme

Si $w_1(A), \dots, w_k(A)$ est un chemin simple dans le graphe, avec $k < 2^n$, alors pour tout $x \in w_1(A)$, $y \in w_k(A)$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \text{diam}(w_1(A)) + \dots + \text{diam}(w_k(A)) \\ &\leq c_{w_1} \text{diam}(A) + \dots + c_{w_k} \text{diam}(A) \\ &< (c_1 + c_2)^n \text{diam}(A) \leq \text{diam}(A). \end{aligned}$$

Or, le diamètre de A est atteint par une paire de points x, y . Il existe donc un chemin simple à 2^n sommets: **les** $w \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^n$ **réalisent des éléments deux à deux distincts.**

Démonstration du Lemme

Si $w_1(A), \dots, w_k(A)$ est un chemin simple dans le graphe, avec $k < 2^n$, alors pour tout $x \in w_1(A)$, $y \in w_k(A)$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \text{diam}(w_1(A)) + \dots + \text{diam}(w_k(A)) \\ &\leq c_{w_1} \text{diam}(A) + \dots + c_{w_k} \text{diam}(A) \\ &< (c_1 + c_2)^n \text{diam}(A) \leq \text{diam}(A). \end{aligned}$$

Or, le diamètre de A est atteint par une paire de points x, y . Il existe donc un chemin simple à 2^n sommets: **les** $w \in \{\alpha_1, \alpha_2\}^n$ **réalisent des éléments deux à deux distincts.**

Supposons qu'il existe deux mots distincts w_1, w_2 tels que $w_1 = w_2$ dans $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. Un n'est pas préfixe de l'autre et donc $w_1 w_2, w_2 w_1$ sont deux mots distincts tels que $w_1 w_2 = w_2 w_1$ dans $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$: ceci contredit le point précédent. □

Fin

Merci de votre attention